

【DRニュース・036】：自然界の不思議なフィボナッチ数列とデザインが美しい黄金比

2017年10月10日発信

今回は、少し頭の刺激をもとめて、「自然界の不思議な数」のフィボナッチ数列とデザインに取り入れると、美しいとされる構図を描く、数学的な比率の黄金比について、調べて見ました。

古来より、科学者たちは、自然界から多くの事を学んできました。一件、無秩序に見える自然ですが、よく目を凝らすと、そこには、「驚くべき数や形の法則」が隠されているのです。

「YouTubeの動画」を見て、自然界に存在する不思議な数列から純粋に感性を掴み取ってください。

https://www.youtube.com/watch?v=Q3WHKRhx_I0・・・まずは、2015.01.15 公開動画を見てから!!

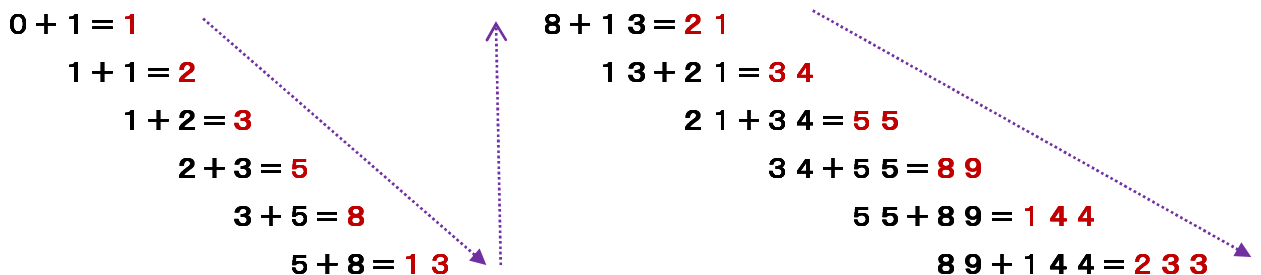
1. 「自然界の不思議な数」のフィボナッチ数列と黄金比

フィボナッチ数列では、3項目以降のそれぞれの数は手前の2つの項の数の和になっている。

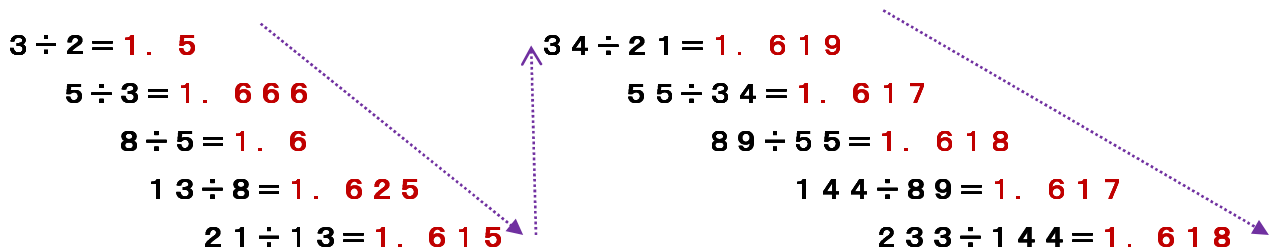
そのため数列は、1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584 ... と続く。

また、2つの連続する項の比を取ると、次第に 黄金比 (約 1:1.618034 ...) に近づく。

(1) フィボナッチ数列 : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 ... と続く



(2) 黄金比 : 1.618034 ... に近づく



上記の単純な数列や比率が、「自然界の不思議な数」として、自然界の現象に数多く出現する。

2. フィボナッチ数

(1) レオナルド・フィボナッチ . . . 自然の中に隠れた数を世に広めた人

フィボナッチ数（フィボナッチすう、英: Fibonacci number）は、イタリアの数学者レオナルド・フィボナッチ（ピサのレオナルド）にちなんで名付けられた数である。

中世のイタリアで子ども時代をすごしたレオナルド・フィボナッチはあけてもくれても数のことばかり考えていました。

そのため、ほかには能がない「のうなし」と呼ばれていたほどです。



成長して世界じゅうを旅したレオナルドは、諸国で使われていた数字、とくにアフリカで出会ったインド・アラビア数字に魅せられ、やがて、

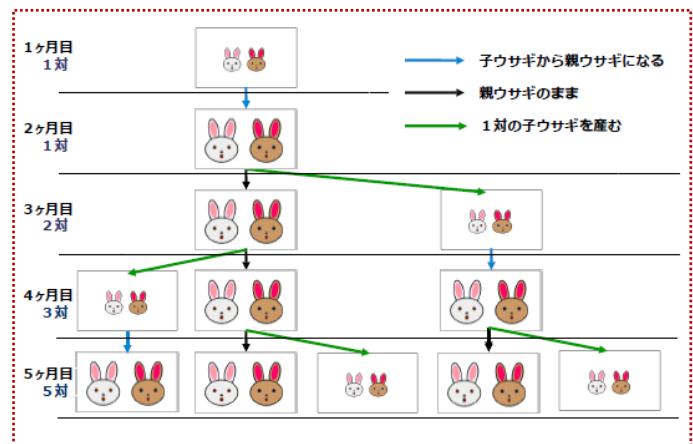
自然界にある多くのものが、ある決まった数でできていることに気づきます。かつて「のうなし」とからかわられていた少年が、フィボナッチ数列と呼ばれることになる数列を世に考案しました。（ただし、インドの数学者の間では6世紀頃から既に知られていたもので、彼の発見ではない）

(2) うさぎ（^{うさぎ}兎）のつがいの数

フィボナッチは次の問題を考案して、広く世に知られるようになりました。

- ① 1つがいの兎は、産まれて2か月後から毎月1つがいずつの兎を産む。
- ② 兎が死ぬことはない。
- ③ この条件のもとで、産まれたばかりの1つがいの兎は、1年の間に何つがいの兎になるか？

0ヶ月目	1対	6ヶ月目	13対
1ヶ月目	1対	7ヶ月目	21対
2ヶ月目	2対	8ヶ月目	34対
3ヶ月目	3対	9ヶ月目	55対
4ヶ月目	5対	10ヶ月目	89対
5ヶ月目	8対	11ヶ月目	144対
		12ヶ月目	233対



n 番目のフィボナッチ数を F_n で表すと . . . この数列 (F_n) は、フィボナッチ数列と呼ばれる。

F_n は再帰的に $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ ($n \geq 0$) で定義される。

. これは、2つの初期条件を持つ漸化式（数列を再帰的に定める等式のこと）です。

(3) 自然界に現れるフィボナッチ数

そんなフィボナッチ数ですが、自然界にその姿を現すことで広く知られています。

例えば、花びらの数や植物の実にある螺旋の数はフィボナッチ数になる場合が多いとされています。

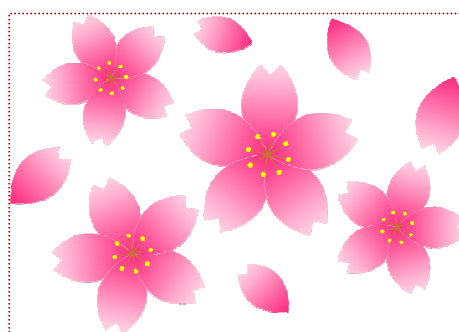
① 花びらの数

例えば、どんな花であったとしてもその花びらは、**3、5、8、13、21、34 枚** ~になっています。

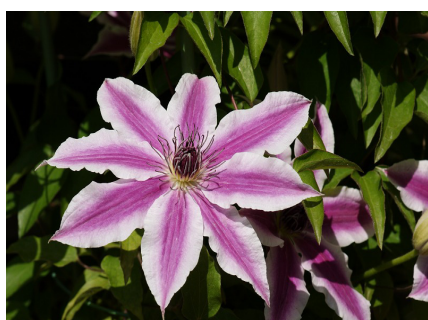
(a) ユリの花びらは 3 枚



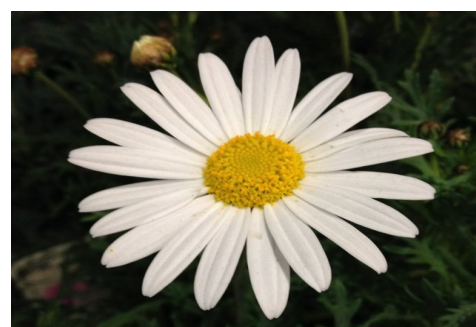
(b) 桜の花びらは 5 枚



(c) クレマチスは 8 枚



(d) マーガレットは 21 枚



(e) ひまわりは 34 枚



8 枚以降からはキク科の植物が多くなってきます。

コスモス、マーガレット、ヒマワリなどはみなキク科の植物です。

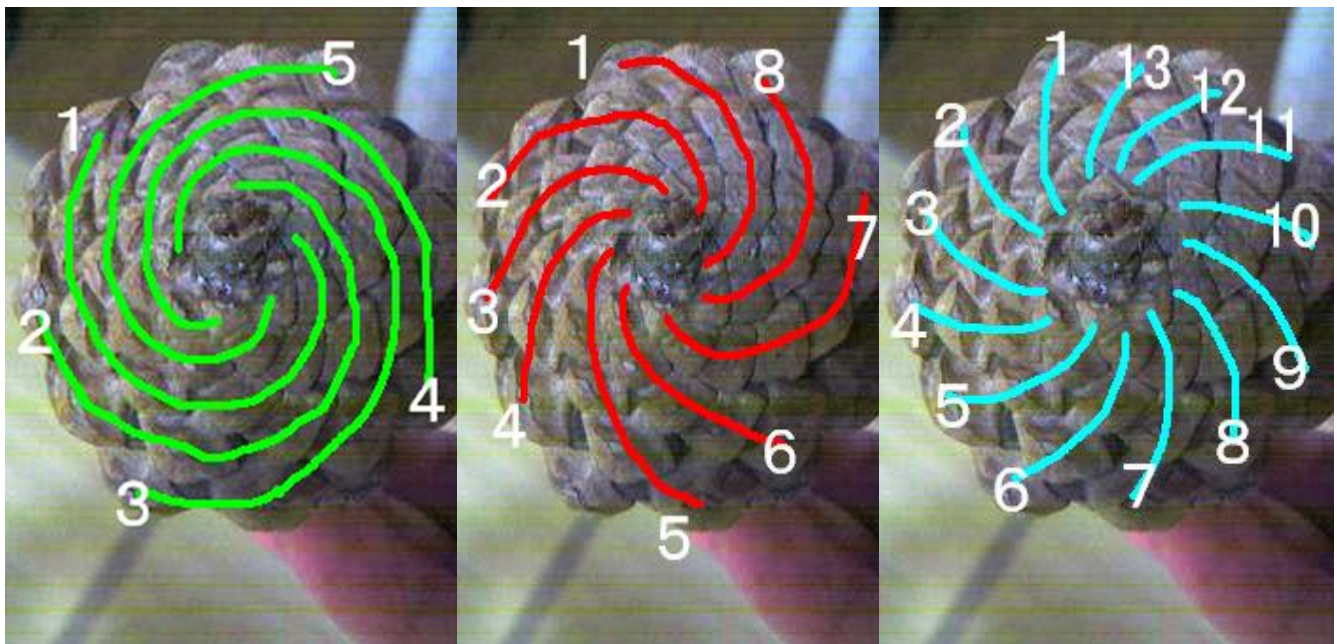
花びらの多い花は、「**ラナンキュラス**」で、**190 枚から 250 枚程**あるそうです。

② 螺旋（らせん）の数

(a) 松ぼっくりの螺旋模様

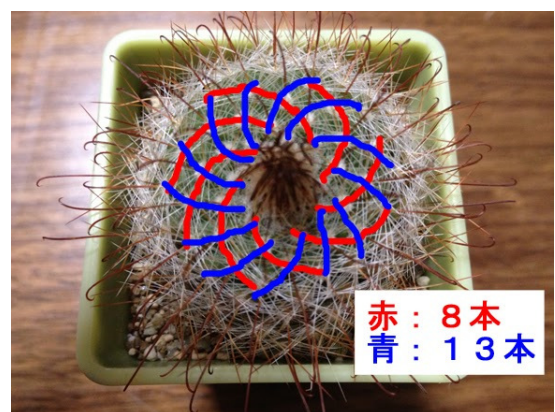
なんと螺旋の数まで 5, 8, 13 本とフィボナッチ数列。

ちなみに、ヒマワリの花についている種^{たね}の螺旋模様もフィボナッチ数列。右周りに 21 本、左周りに 34 本



(b) サボテンの螺旋模様

右図は、赤が 8 本、青が 13 本ある。



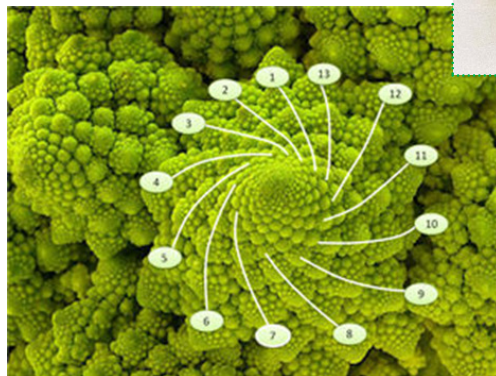
左図は、時計周りに 21 本、
反時計周りに 13 本ある。

(C) 不思議な形をした野菜・ロマネスコ

カリフラワーの一種で、味はブロッコリーのようです。

※私は、毎年、栽培しています。

しかし、何よりこの野菜の形が、実は数学的に面白いのです。



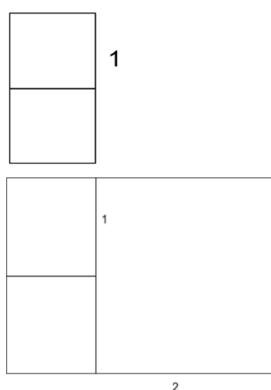
まず、典型的な「**フラクタル形状**」
だということ ⇒ **不思議で綺麗**。

フラクタルとは「どの部分をとって
みても自分に相似な部分から成り立
っている」というような形状です。

さらにこの野菜、「**フィボナッチ数列**」にも従っています。

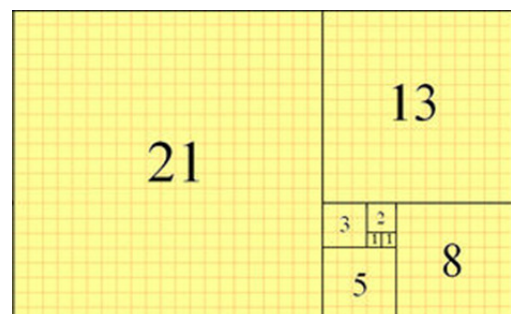
ロマネスコの場合、円錐が螺旋系に並んでいますが、右曲がりでは **13 列**、左曲がりでは **8 列** あります。8 と 13 は、フィボナッチ数列に含まれる数字です。

(4) フィボナッチを図形で表すと



- ① まず、1 辺の長さが **1** の正方形を 2 つならべます。
横の長さは **1**、縦の長さは **2** ですね。
- ② その横に、1 辺の長さが **2** の正方形をおきます。
横の長さは **3**、縦の長さは **2** ですね。
- ③ このあと 1 辺の長さが **3** の正方形、**5** の正方形、**8** の正方形 …… を並べていって、大きな長方形を作ります。

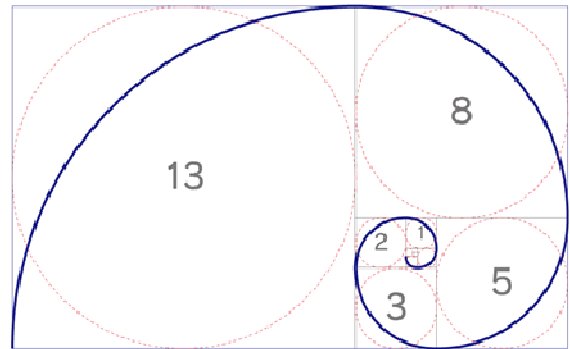
- ④ こうして作られていく
長方形の縦・横の長さを並べると、
1,2,3,5,8,13,21,
フィボナッチ数列ができます。



(5) オーム貝のうずまき

このうずまき、なんとなく見たことは
ありませんか？

アンモナイトやオウムガイのうずまきは、
このような形を描いています。



このように、自然界では、
フィボナッチ数が多く
出現します。

・・・ **神秘的ですね。**

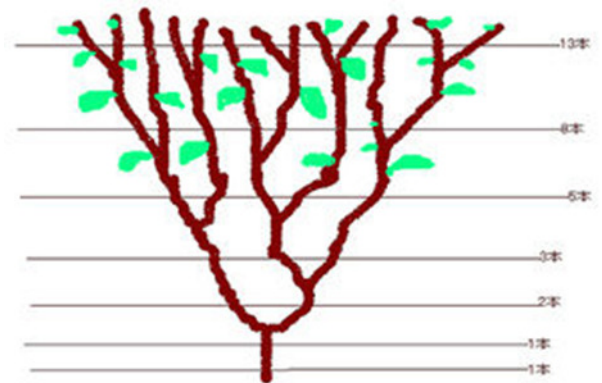
(6) 木の枝の伸び方

木の枝の伸び方は一般に次のルールで枝分
かれすると考えられます。

ルール1：枝は成長期に2つに分かれる

ルール2：枝が2つに分かれるときに栄養は均
等に配分されずに、栄養の多いほう、少ないほ
うとかたよりがあある。

栄養の多いほうの枝は次の成長期に2つに分か
れることができ、交互に栄養の少ないほうの枝は次の成長期に2つに分かれることができる。



この2つのルールにのっとって、枝分かれの様子を再現してみると上図のようになる。

おのこの成長期における枝の本数は、「うさぎ（^{うさぎ}兎）のつがいの数」と同様に、フィボナッ
チ数列そのものとなる。

これは栄養の多い方に分裂が進むと、自然とフィボナッチになる。

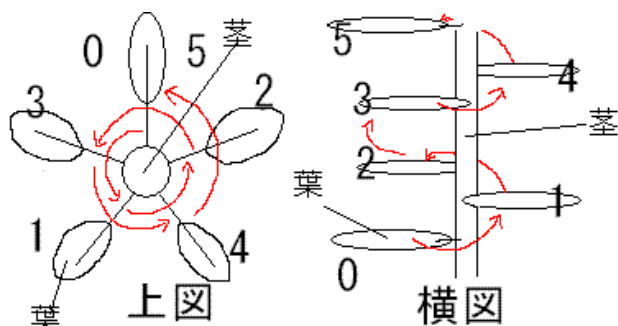
・・・ **つまり、木の生存、成長にとって合理的だから、ということのようです。**

(つまり、自然界において、生存するために合理的だから、ということでしょうか?)

(7) 植物の葉の付き方

葉のつき方のことを葉序といいます、その葉序、上の葉と下の葉が重なるまでの葉の枚数と回転数にフィボナッチ数列が出てきます。

植物が螺旋状に葉をはやしていくのは、実は無造作でなく、**黄金角 (137.5°)** に従ってるんです。・・・ これは、太陽の光をより多く取り込む自然の知恵みたいです。



(8) 対数螺旋の不思議

台風の渦巻き模様や天体の螺旋模様も中心からの線と螺旋の接線とのなす角が **72.8°** の螺旋はほぼ**黄金比の螺旋**です。

対数螺旋はオーム貝や巻貝のほか、山羊の角象の 牙、鳥の爪、人間の頭髮のつむじ、ヒマワリや菊の花など、さまざまな生物体の形状の中に見られる。

そのため、この不思議な曲線を生物の成長過程を示す「**生命の曲線**」、あるいは「**成長螺旋**」と呼ぶ科学者もいる。



※南半球では渦巻きの向きが逆となる

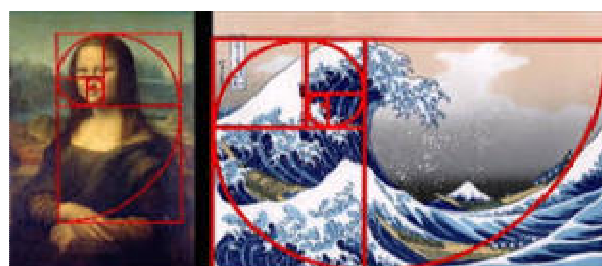


(9) その他

右のように「九州地区」もフィボナッチ??

モナリザの構図もフィボナッチ。

葛飾北斎の富嶽三十六景の波もフィボナッチ。



3. 黄金比と黄金角

黄金比は、数学的な比率を表します。自然界やデザインなどにも利用されており、見た目が美しいとされる構図を描くことができます。

では、黄金比とは実際なんなのでしょう？ そしてどのように利用することで、デザインを改善することができるのでしょうか？

(1) 黄金比とは

歴史上、黄金比を数学の話題として初めて意識したのは、ユークリッドとされています。彼は 次のような幾何学の問題として捉えていました。

① ユークリッドによる黄金比問題

ユークリッドによる黄金比問題

ユークリッドによって提起された問題は

「線分をふたつに分ち、小さい方の線分と全体とでできる長方形の面積と、大きい方の線分でできる正方形の面積が等しくなるように分けよ。」である。

図のように線分 AB を $a : b$ に分割すると仮定すると、

$$a^2 = b(a + b)$$

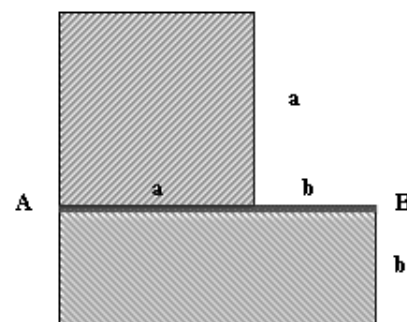
という関係を満たせばよいから、上式を b^2 割って整理すると、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

となる。この2次方程式を解いて、

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である。つまり線分 AB を $\frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$ の比に分割すればよい。

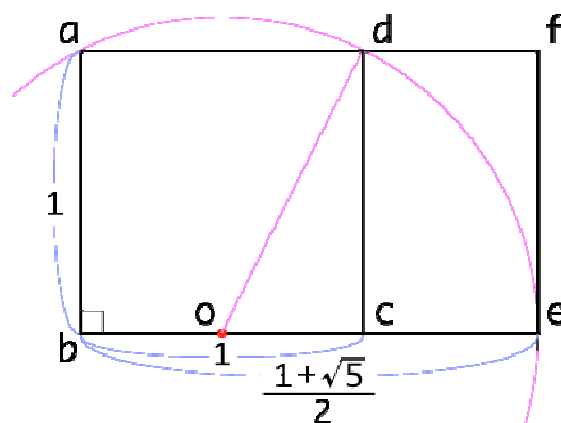


② 黄金比を持つ長方形の作図

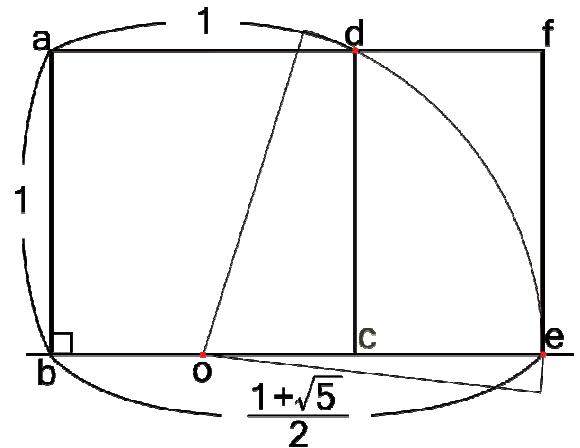
では次に、この比率を持つ長方形を作図してみましょう。

黄金長方形の作図は意外に簡単。

コンパスと定規を使って描いて見ましょう。



- 【a】 正方形 $abcd$ を描き、辺 bc の中点を o とする。
- 【b】 点 o を中心として od を半径とする円弧を描き、 bc の延長との交点を e とする。即ち $od=oe$
- 【c】 長方形 $abef$ を描けば、黄金長方形の出来上がりです。

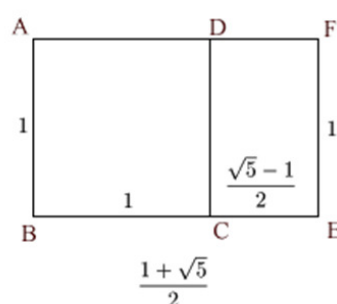


③ 黄金比をなすことの証明

さて、この長方形がどうして均斉がとれていると見えるのでしょうか。それを探るために、その長方形の性質を見ていきましょう。

この長方形から、最初の正方形を取り除いてできる長方形を考えます。この小さい長方形の辺の比率を計算してみましょう。

CE:EFが黄金比をなすことの証明



$$\begin{aligned}
 CE : EF &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 : 1 \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1 \\
 &= 1 : \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\
 &= 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

このように小さい長方形は、再び黄金比を持つ長方形です。

さらに、小さい長方形から正方形を取り除いても、また黄金比を持つ長方形が残ります。

..... この状況は永遠に続きます。

この性質を言い換えると、この長方形は、そこから正方形を取り除いても、元の長方形と相似な長方形が残るような長方形である、と言えます。あるいは、正方形に、だんだん小さくなる正方形を付け加えていって、完全に充填できる長方形である、とも言えます。

..... この性質は、自然界の生物の成長の仕組みに密接に結びついています。

このことから、私たち人間がそういう仕組みを内在している長方形を見るとき、無意識のうちに、その図形を「自然界を象徴した図形」として受け入れているのではないのでしょうか。

..... それが、美しいという感覚を引き起こすのだろうと想像します。

④ 黄金比と連分数

黄金比 ($= (1 + \sqrt{5})/2$) は、
つぎの連分数である。

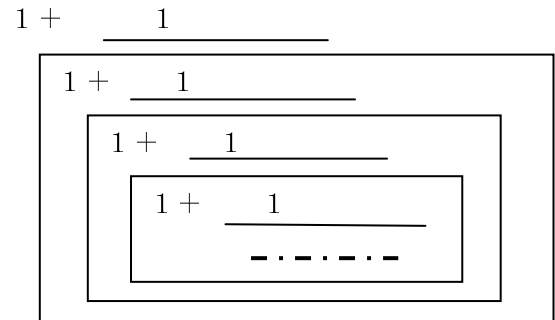
$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

$$1 + 1/1 = \mathbf{2/1}、1 + 1 / (1 + 1/1) = 1 + 1 / (2/1) = \mathbf{3/2}$$

$$1 + 1 / (1 + 1 / (2/1)) = \mathbf{5/3}、1 + 1 / (1 + 1 / (1 + 1 / (2/1))) = \mathbf{8/5}、\quad \dots\dots\dots$$

⑤ 連分数とフラクタル構造

この連分数は、**フラクタル構造**
(**自己相似形の生成**) になっている。



実際、「いちばんシンプルな無理数（非整数比）」が、「黄金比」の意味である。

・・・「**いちばんシンプル**」だから、^{がんちく}含蓄(内面に秘める深い意味)もシンプルである。

(2) 黄金比のデザイン

黄金比は、数学的な比率を表します。自然界やデザインなどにも利用されており、見た目が美しいとされる構図を描くことができます。

では、黄金比とは実際なんなのでしょう。実際に黄金比の活用事例から調べて見ましょう。

① 縦横の比率が、1 : 1.6

ピラミッドには、この黄金比が使われていると言われています。クフ王のピラミッドを例に挙げると、ピラミッドの高さと底辺の長さの比率がだいたい 1 : 1.6になります。これは黄金比と呼べる特別な比率になります。

同じ黄金比の比率を持つものとして、ミロのヴィーナスも腰で区切ると上下に 1 : 1.6になりますし、ギリシャのパルテノン神殿も高さと幅の比率が1 : 1.6、古代ローマの凱旋門も高さと幅の比率が1 : 1.6になっています。

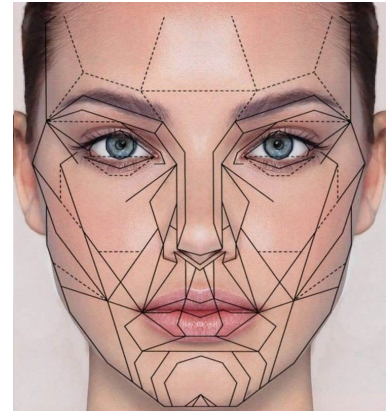
このように、1 : 1.6 の比率を持つものはとても美しい形をしているので、この比率は神秘的な比率と考えられました。身近なものではテレホンカードやハガキなども黄金比になっています。

② 黄金比のいろいろ

この黄金比を利用した美しい比率は、何世紀にもわたって利用されており、ギザの大ピラミッドからギリシャにあるパルテノン宮殿、システィーナ礼拝堂内にあるミケランジェロの「アダム」の創造 (Creation of Adam)」やヴァン・ゴッホの「モナ・リザ」、果てはペプシのロゴや Twitter ロゴにも利用されています。さらに私達の体や顔でさえも、数学的な比率で表現されています。

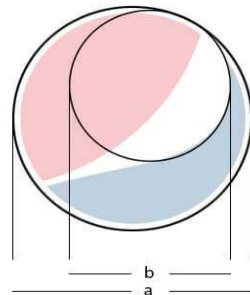
【a】 顔の数学的比率表現

実際に、私たちの脳みそは、黄金比を利用している物体やイメージを好むとされており、ほとんど無意識の反応と言えるでしょう。黄金比を利用してデザインを微調整することで、脳により強いインパクトを与えることができます。



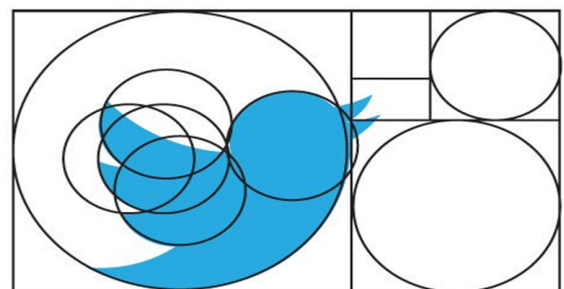
【b】 Pepsi のロゴデザイン

Pepsi のロゴデザインは、黄金比を利用した、ユニークな 2 つのサークル円から構成されています。サークル円を組み合わせたことができた、ロゴ中央の白いスライスに、黄金比率が適用されています。



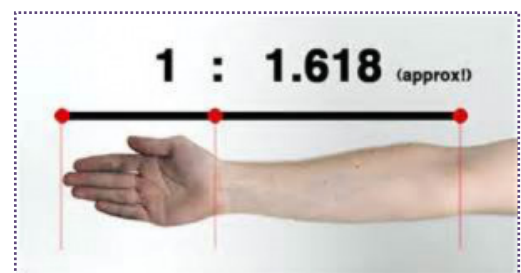
【c】 Twitter のロゴデザイン

Twitter のロゴデザインは、幾何学 (英: Geometry) を用いた、複数のサークル円を組み合わせて構成されています。黄金比を利用して要素を並べたときに比べると、あまり正確ではありませんが、バランスやデザインの調和を取るために、表面的には黄金サークルを利用しています。



【d】 人間の手のひらと腕の長さ

手首から一番長い指の先までの長さとして手首から両腕までの比は黄金比とほぼなっています。



③ 黄金比をデザインへうまく適応するポイント

黄金比の基礎知識でお手上げかもしれませんが、実際に黄金比を利用して、どのようにデザインを改善すればよいか、のポイントを紹介します。

特に黄金比は、**レイアウトや余白スペース、コンテンツ、イメージ写真やロゴデザインなど**、さまざまな構図に適用することができます。

【a】 レイアウト：寸法に黄金比を利用

レイアウトの寸法を決めるときに、黄金比をガイドラインとして利用してみましょう。シンプルに黄金比を取り入れる方法として、**1:1.618 の比率で寸法を決めましょう。**

たとえば、ウェブサイトで典型的な **960px** を考えたとき、**1.618 で割り算すること**で、**594px** という、高さを決定することができます。

またレイアウトに黄金比を利用し、2 カラムに分割してみましょう。

こうすることで、調和の取れた美しい見た目を実現することができます。



【b】 余白スペース：黄金比を利用して配置

以下のサンプル例では、アートフェスティバル用に作成されたフライヤーデザインで、ロゴやデザインコラージュを、黄金比を利用して配置しています。

よく見ると、ロゴの周りにはたっぷりの余白スペースが確保されており、黄金比によってロゴのサイズや配置場所などを、的確に決定しているのがよく分かります。



【c】 配置のデザイン：配置される場所は黄金比

左記のサンプル例では、3つのデザイン要素（小さなワシ、文字テキスト、大きなワシ）から成り、配置されている場所は、黄金比によって決められています。

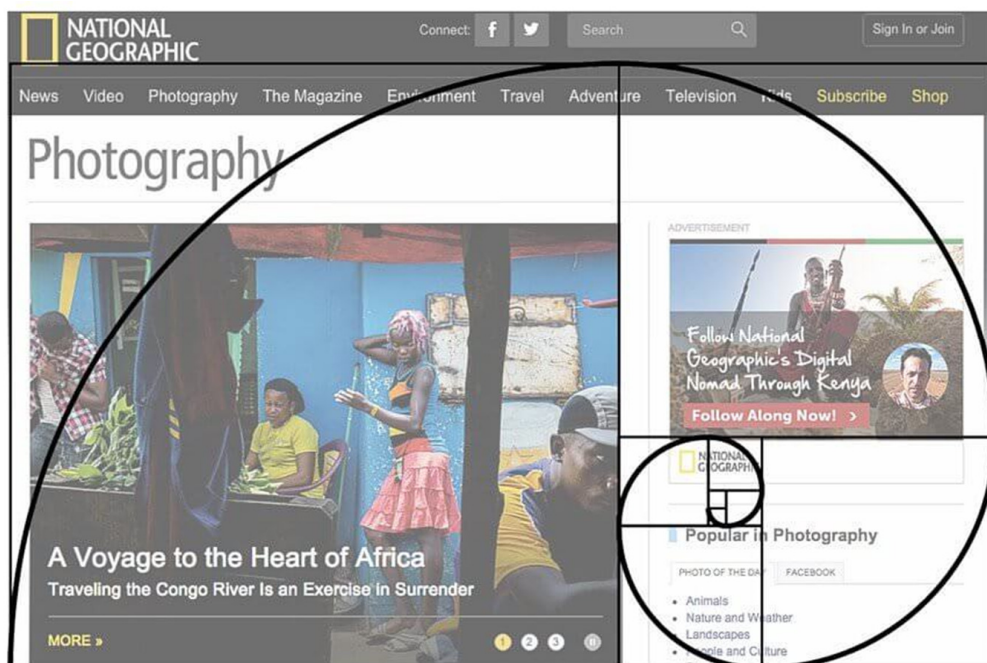
また小さなワシにも黄金比を加えることで、
 ・ ・ 見た目が美しいデザインに仕上がっています。



【d】 コンテンツ：黄金スパイラルをトレース

黄金比によってできる螺旋スパイラルを、コンテンツの配置場所を決めるガイドとして活用することができます。わたしたちの目は、もっとも細部のディテールまで表現される、スパイラルの中心に注目を集めます。

そのためフォーカル・ポイントを螺旋スパイラルの中心に配置するように心がけましょう。



小さなロゴが螺旋スパイラルの中心にあるのが分かります。

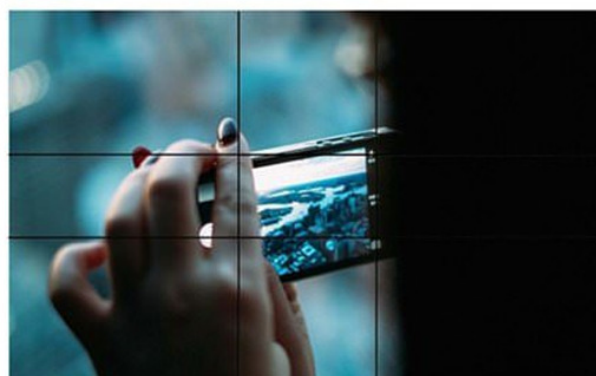
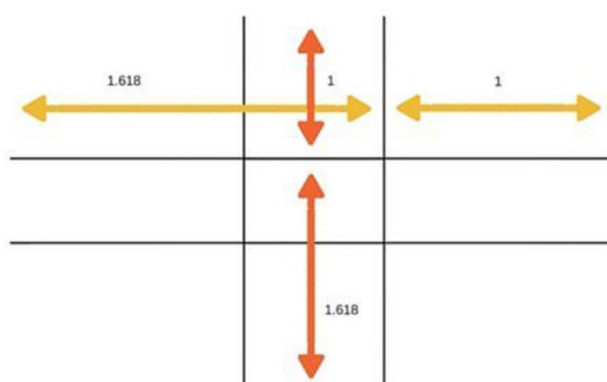
・ ・ ・ 黄金比を利用することで、自然とユーザーの注目をあつめることができます。

【e】 イメージ画像：三分割法を利用

イメージ画像において構図（英：Composition）は、重要な情報を伝えたり、美しいデザインを作成するのに重要になります。

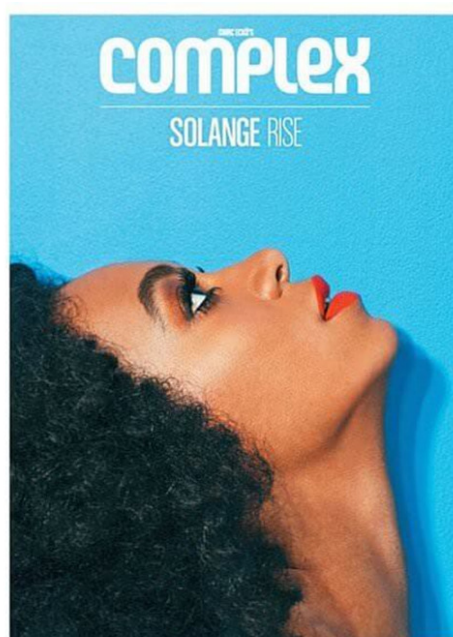
イメージ画像に黄金比を利用することで、重要なデザイン要素に視線を誘導する手助けをしてくれます。黄金比を利用してイメージ画像を縦横それぞれ3分割してみましょう。

このときに、幅の比率を $1:0.618:1$ になるように設定することで、黄金比を用いて分割することができます。線が交わる部分にデザイン要素を配置することで、注目をあつめることができ、より魅力的な構図を表現することができます。



黄金比を利用することで、余白スペースや配置場所を決定しています。

女性モデルの鼻と額は、一番上の水平ラインと揃っており、目と鼻は中央の長方形の垂直線に沿って、配置されているのが分かります。



以下のサンプル例では、**三分割法**（英: Rule of Thirds）が採用されています。ここでは、ほとんど空白の中央の長方形に、注目を集めるように工夫されています。女性モデルの目は、長方形の角に配置されることで、よりユーザーを魅力するデザインを演出しています。



黄金比を利用し、女性モデルの目を中心に切り取られています。中心から少しだけ外してモデルを配置することで、垂直ラインと女性モデルの顔が、きちんと並んでいるのが分かります。

【f】 **ロゴデザイン：黄金サークルを利用**

黄金比を利用して、均等の取れた美しい正方形や長方形を作成できるのと同じように、サークル円に適用することもできます。正方形に隣接するように作成されたサークル円は、どれも 1:1.618 の比率となります。

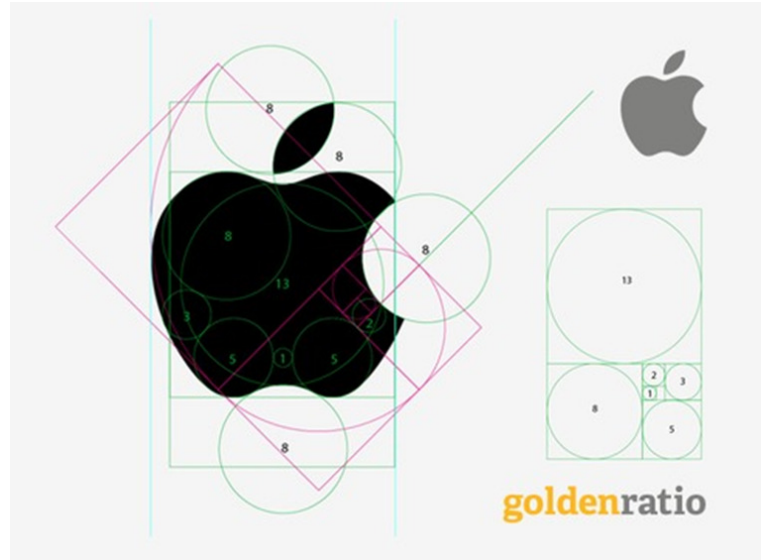


黄金比を利用したサークル円「**黄金サークル**（英: Golden Circles）」は美しい見た目を表現するだけでなく、統一感のあるロゴデザインにも適用できます。

もう一度、**11ページ**の **Pepsi** と **Twitter** のロゴデザインをよく見てみましょう。

Apple 社のおなじみのリンゴマークも黄金比が使われていることで有名です。

シンプルながら美しい印象を与えるのには安定した比率が用いられてるからだと言えます。
ちなみに Apple では iPhone から MacBook の中身まで、様々なデザインが黄金比になっています。



デザインの調和を保つ黄金比の本当の力は、異なるデザインをひとつにまとめることで、それぞれの個性を残したまま、デザイン全体をうまくブレンドできることです。

(3) 黄金角とは

木は自分の枝の葉が、上からの太陽光線を最大限に受けられるように、最適に枝を出す傾向にあります。最初に出した枝から、ある一定の角度で次の枝を出すとすると、どんな角度がよいのでしょうか。

それは、1周360°を黄金比に分けた角、

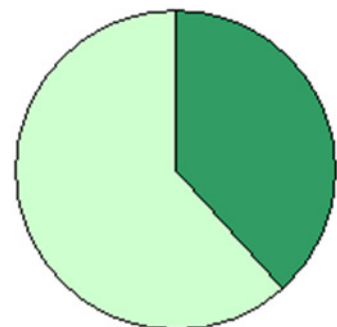
・・・ すなわち黄金角 (約137度) ごとに枝をだすのが、最適であることが知られています。

黄金角

黄金角とは、円周を $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に分けた角である。

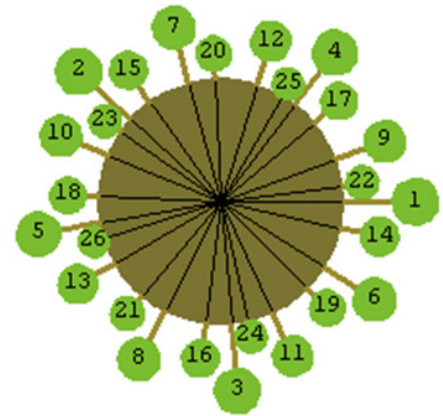
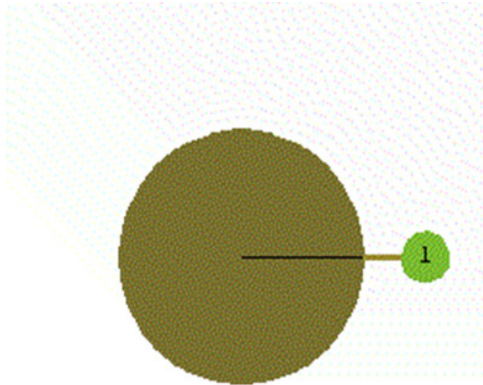
$$360^\circ \times \frac{1}{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 137.507764\dots$$

という角度になる。



黄金角の位置で生えた芽が成長して次第に大きくなり、外側に広がっていく様子を見てみよう。

下の図は、木の幹を上から見たとき、外側が古い芽、内側へ行くほど新しい芽と考えて下さい。
黄金角で 生えた芽は、少しずつずれながら、螺旋模様を作ることが分かります。



このような植物の「**成長の規則**」が顕著に現れる
 実例は、ひまわり、バラなどの花の模様や
 松つかさの模様でしょう。

4. 最後にまとめ

大いなる自然は、人間がフィボナッチ数列を発見する遥か昔からそれを知っていたということになります。

（何故なら、人類は自然から多くを学んでおり、それに関する分野を「**自然科学**」と呼び表している）

最後にまとめとして、自然界に現れるフィボナッチ数の例や、ここでは省略した難解な部分について視覚的に理解できる動画を掲載しました。 **もう一度・・・** <https://youtu.be/kkGe0WYOFoA>

自然界も法則や合理性に基づいて成立しているという事実と、

..... **その事に対する尊敬やロマンを強く感じさせてくれることでしょ**

未だ未だ、私たちを取り巻く、自然やデザインの魅力を探求することは、あくなき挑戦が要ります

全てを理解することは大変重要ですが、それよりも、まず「**興味を持つことが大切**」です

これを機に、もっと自然を愛し、数学に興味を持って、不思議な世界・宇宙を探してみましょう